

Оригинал — *Matematiikka, pitkä oppimäärä, kevät 2020*.

Авторский перевод и публикация — с разрешения *Ylioppilastutkintolautakunta*.

Национальный экзамен по математике в Финляндии для выпускников гимназий Профильный уровень, весна 2020

Экзамен состоит из 13 заданий, из которых выполняются десять. Задания разделены на три части. Часть А содержит четыре обязательных для всех задания. Часть В1 содержит пять заданий, из которых выполняются три. Часть В2 содержит четыре задания, из которых выполняются три. Все задания оцениваются числом очков от 0 до 12, поэтому максимальная сумма очков за экзамен равна 120.

В части А вы можете пользоваться таблицами и основными программами, предоставляемыми системой проведения экзамена. Часть А завершается нажатием кнопки, расположенной после задачи 4. После этого ответы части А редактировать больше нельзя. После завершения части А вы можете продолжать пользоваться программами системы проведения экзамена. Вдобавок вам разрешается использовать свой калькулятор. Также вы можете выполнять задания частей В до завершения части А.

В большинстве заданий ответы на все пункты записываются в одно и то же поле ответа. Разделяйте свой ответ в соответствии с пунктами задания. При желании вы можете снабжать ответы рисунками, диаграммами и таблицами и прикреплять соответствующие скриншоты к тексту ответа в любом месте.

Не пишите ничего в месте, отведённом для ответа на то задание, которое не хотите оставлять для оценивания.

Часть А

Выполните четыре задания.

1. Уравнения и неравенства [12 очков]

В этом задании достаточно привести лишь ответ. Не обосновывайте ответы этого задания. В этом задании нельзя использовать скриншоты и редакторы формул. Максимальная длина каждого ответа составляет 30 знаков.

- (2 очка) Решите уравнение $-4x + 2 = 0$.
- (3 очка) Решите неравенство $2x + 4 < -6$.
- (3 очка) Решите уравнение $x^6 + x^3 = 0$.
- (4 очка) Какие числа $x \in \mathbb{R}$ удовлетворяют обоим неравенствам $-3x + 6 < 0$ и $x^2 - 9 < 0$?

2. Операции над векторами [12 очков]

Рассмотрим векторы $\vec{a} = 7\vec{i} + 2\vec{j}$ и $\vec{b} = -3\vec{i} + 5\vec{j}$.

Не обосновывайте ответы этого задания. В этом задании нельзя использовать скриншоты и редакторы формул, поэтому пишите \vec{i} и \vec{j} в виде i и j . Максимальная длина каждого ответа составляет 30 знаков.

1. (2 очка) Вычислите $\vec{a} + \vec{b}$.
2. (2 очка) Вычислите $\vec{b} - 2\vec{a}$.
3. (2 очка) Вычислите $|\vec{b}|^2$.
4. (2 очка) Вычислите длину вектора $\vec{a} + \vec{b}$ с точностью до двух десятичных знаков.
5. (2 очка) Вычислите $\vec{a} \cdot \vec{b}$.
6. (2 очка) Вычислите угол между векторами \vec{a} и \vec{b} с точностью до градуса.

3. Экстремум площади [12 очков]

1. (3 очка) Вычислите интеграл

$$\int_0^2 \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx.$$

2. (9 очков) Из области, ограниченной графиком функции $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ и осью x , вырезается вертикальная полоса прямыми $x = t$ и $x = t + \frac{1}{2}$. При каком значении параметра $0 \leq t \leq \frac{3}{2}$ площадь полосы максимальна?

4. Наибольшее расстояние [12 очков]

Точка (x, y) удовлетворяет неравенству $x^4 + y^2 \leq 1$. Найдите наибольшее расстояние от точки (x, y) до начала координат.

Часть В1

Выполните три задания.

5. Фигуры в круге [12 очков]

Радиус круга равен 4. Внутри круга нарисованы три кривых, которые соединяют концы горизонтального диаметра так, как показано на [рисунке 5А](#). Каждая кривая состоит из двух полуокружностей, и они делят горизонтальный диаметр на четыре равные части. Кривые делят круг на четыре разноцветные области. Покажите, что все они имеют одинаковую площадь.

6. Парабола и точка [12 очков]

В этом задании можно дать как точные ответы, так и приближённые с точностью до двух десятичных знаков.

Рассмотрим параболу $y = x^2$ и точку $A = (1, -1)$.

1. (4 очка) Через какие точки параболы проходят касательные, проведённые через точку A ?
2. (8 очков) Найдите точку параболы, ближе всего расположенную к точке A , и расстояние от неё до точки A .

7. Яцзы [12 очков]

В игре яцзы игрок бросает пять игральных кубиков. Рассмотрим броски, в которых появляются *фулл хаус* или *каре*. Фулл хаус — комбинация, в которой одно количество очков выпадает три раза, а некоторое другое количество очков — два раза. В каре выпадает четыре раза одно количество очков и один раз — другое.

1. (3 очка) Найдите вероятность того, что выпадет фулл хаус с тремя шестёрками и двумя пятёрками.
2. (6 очков) Найдите вероятность того, что выпадет фулл хаус.
3. (3 очка) Найдите вероятность того, что выпадет каре.

8. Алгоритм деления полиномов [12 очков]

С помощью алгоритма деления полиномов можно разделить, например, полином

$$p(x) = x^6 - 4x^4 + 2x^3 + 7x^2 - 3x + 4$$

на полином $q(x) = x^2 - 3x + 1$. Вот первые шаги алгоритма:

$$p(x) = x^4q(x) + 3x^5 - 5x^4 + 2x^3 + 7x^2 - 3x + 4 = (x^4 + 3x^2)q(x) + 4x^4 - x^3 + 7x^2 - 3x + 4.$$

Объясните, что тут сделано, и выполните до конца остальные шаги алгоритма деления.

9. Производная обратной функции [12 очков]

Приведите пример такой функции f , что для производной обратной к ней функции выполнено равенство $(f^{-1})'(2) = \frac{1}{2}$. Не забудьте обосновать, почему ваш пример обладает требуемым свойством.

Часть В2

Выполните три задания.

10. Логарифм большого числа [12 очков]

Десятичная запись числа $a = 1234\dots 9101112\dots 99100101\dots 998999$ получается последовательным записыванием чисел 1, 2, 3, ..., 998 и 999.

1. (3 очка) Для какого целого числа k выполнено $a \approx 1,23 \cdot 10^k$?
2. (9 очков) Найдите целую часть числа $\ln a$.

11. Числовая последовательность [12 очков]

Пусть $a_1 = \sqrt{2}$ и $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$ при $n \geq 1$.

1. (4 очка) Покажите по индукции, что последовательность (a_n) является возрастающей.
2. (4 очка) Покажите по индукции, что $a_n < 2$ для всех $n \geq 1$.
3. (4 очка) Найдите значение выражения

$$\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}},$$

понимая его как предел последовательности (a_n) .

12. Вероятность среднего геометрического [12 очков]

Среднее геометрическое двух положительных чисел a и b есть \sqrt{ab} .

1. (3 очка) Приведите пример двух различных чисел a и b из промежутка $[2, 100]$, для которых \sqrt{ab} является целым числом.
2. (9 очков) Генератор случайных чисел выдаёт независимо друг от друга два целых числа в диапазоне $[1, 100]$ так, что вероятность появления каждого числа равна $\frac{1}{100}$. Какова вероятность того, что среднее геометрическое сгенерированных чисел является целым числом? Вы можете вычислить классическую вероятность этого события точно или дать оценку, основанную на модельных соображениях.

13. Тригонометрическое неравенство [12 очков]

Пусть n — положительное целое число. Рассмотрим функции

$$f(x) = \sin\left(\frac{x}{n}\right) \quad \text{и} \quad g(x) = n \cos x.$$

Покажите, что для корня $x_0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$ уравнения $f(x) = g(x)$ верно $g'(x_0) < -n + 1$.

ОТВЕТЫ

Оригинал – Hyvän vastauksen piirteitä.

1.1. $x = \frac{1}{2}$

1.2. $x < -5$

1.3. $x = 0$ или $x = -1$

1.4. $2 < x < 3$

2.1. $4\vec{i} + 7\vec{j}$

2.2. $-17\vec{i} + \vec{j}$

2.3. 34

2.4. $\approx 8,06$

2.5. -11

2.6. $\approx 105^\circ$

3.1. $\frac{4}{\pi}$

3.2. $\frac{3}{4}$

4. $\frac{\sqrt{5}}{2}$

6.1. $(1 - \sqrt{2}, 3 - 2\sqrt{2}) \approx (-0,41; 0,17)$ и $(1 + \sqrt{2}, 3 + 2\sqrt{2}) \approx (2,41; 5,83)$

6.2. $\approx (0,31; 0,10)$

7.1. $\frac{10}{6^5}$

7.2. $\frac{50}{6^4}$

7.3. $\frac{25}{6^4}$

8. $p(x) = (x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 11x + 36)q(x) + 94x - 32$

10.1. 2888

10.2. 6650

11.3. 2

12.2. 0,031